17/12/19

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ
(ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ Τ.Μ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εστω τμ X με γνωστή κατανομή. Ζητείται η κατανομή της τμ $Y=g(X)$, όπου g είναι πραγματική συνάρτηση.

(A) Διακριτή Περίπτωση

Μέθοδος της σ.π

Εστω διακριτή τμ X με τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ και γνωστή σ.π $P_X(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$.
Εστω η τμ $Y=g(X)$. Τιμές Y: $y_i=g(x_i)$, $i=1,2,\dots$

Η σ.π της Y

$$\boxed{P_Y(y_i)} \overset{\text{ορ}}{=} P(Y_i=y_i) = P(g(X)=y_i) = \boxed{P(\{x_i : g(x_i)=y_i\})} = \sum_{\{x_i : g(x_i)=y_i\}} P_X(x_i)$$

Πχ

Εστω τ.μ X με τιμές $x=0,1,2,\ldots$ και σ.π $P_X(x)=\frac{1}{3}$, $x=0,1,2,\ldots$

Να βρεθεί κατανομή της τ.μ $Y=2X+1$

ΛΥΣΗ

Τιμές της τ.μ Y $y=2x+1$, $x=0,1,2,\ldots$

Άρα $y=1,3,5,\ldots$

Επομένως η Y διακριτή τ.μ

$P_Y(1)=P(Y=1)=P(2X+1=1)=P(X=0)=P_X(0)=\frac{1}{3}$

$P_Y(3)=P(Y=3)=P(2X+1=3)=P(X=1)=P_X(1)=\frac{1}{3}$

$P_Y(5)=P(Y=5)=P(2X+1=5)=P(X=2)=P_X(2)=\frac{1}{3}$

Άρα

$$\boxed{P_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & y=1,3,5,\ldots\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}}$$

Πχ

Εστω τ.μ X με τιμές $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$ και σ.π $P_X(x)=\frac{1}{7}$ $\forall x=0,\ldots,\pm3$

κατανομή της $Y=X^2$?

ΛΥΣΗ

Τιμές της Y : $y = x^2$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$
δηλ. $y = 0, 1, 4, 9$
Άρα Y διακριτή

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(X^2 = 0) = P(X=0) = P_X(0) = \frac{1}{7}$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=1 \text{ ή } X=-1) \overset{\text{ξένα}}{=} P(X=1) + P(X=-1)$
$= P_X(1) + P_X(-1) = \frac{2}{7}$

$P_Y(4) = P(Y=4) = P(X^2=4) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{2}{7}$

$P_Y(9) = \frac{2}{7}$

Άρα,

$$\boxed{P_Y(y) = \begin{cases} 1/7 & , y=0 \\ 2/7 & , y=1,4,9 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}}$$

Π.χ

Έστω τ.μ X με σ.π, $P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & , x=0 \\ \frac{1}{2\nu} & , x = \pm 1, \ldots, \pm(\nu-1) \end{cases}$

Κατανομή $Y = |X|$?

ΛΥΣΗ

Τιμές της τ.μ Y: $y = |x|$, $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm(\nu-1)$
Άρα $y = 0, 1, \ldots, \nu-1$ (εφόσον $\nu > 1$)

$$P_Y(0) = P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = P_X(0) = \frac{1}{\nu}$$

$$P_Y(1) = P(Y=1) = P(|X|=1) = P(X=1 \text{ ή } X=-1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{1}{\nu}$$

Γενικότερα για $k = \pm 2, \ldots, \pm(n-1)$

$$P_Y(k) = P(Y=k) = P(|X|=k) = P(X=k) + P(X=-k) = P_X(k) + P_X(-k) = \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{\nu}$$

Άρα,

$$\boxed{P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & y = 0, 1, \ldots, \nu-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}}$$

(B) Συνεχής Περίπτωση

Μέθοδος της ασκ

Έστω μια συνεχής τ.μ X με γνωστή F_X ή f_X. Τότε η ασκ της τ.μ $Y = g(X)$ είναι:

$\forall y \in \mathbb{R}$ είναι $F_Y(y) \overset{\text{ορ.}}{=} P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(\{x : g(x) \leq y\})$

$$= \int_{\{x : g(x) \leq y\}} f_X(x)\, dx$$

Οπότε $\boxed{f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}}$

ΠΧ

Ομοιόμορφη τμ X με ασκ $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\leq x\leq 1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η κατανομή της τμ $Y = X^n$

ΛΥΣΗ

Προφανώς $X \sim U(0,1)$ και $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Τιμές της Y: $y = x^n$, $x\in(0,1)$

Άρα, $y\in(0,1)$

Για $y\in(0,1)$

$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) \overset{\text{ορ.}}{=} F_X(y^{1/n}) = y^{1/n}$

Άρα, $F_Y(y) = y^{1/n}$, $y\in(0,1)$

αριθμοί
διάφορα

Για $y\in(0,1)$ η $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}(y^{1/n}) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}y^{-\frac{n-1}{n}}$

Συμπερασματικά:

Η σ.π.π της Y είναι $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{-\frac{(n-1)}{n}} & , 0<y<1 \\ 0 & , αλλού \end{cases}$

Π.Χ

α) Αν η τ.μ X είναι συνεχής με τιμές στο $\mathbb{R}$ και γνωστή σ.π.π f_X, να βρεθεί η σ.π.π της τ.μ $Y = X^2$

β) Αν $X \sim N(0,1)$ ποια η κατανομή της $Y = X^2$?

ΛΥΣΗ

α) Τιμές της Y $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $y \geq 0$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y})$
$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$\Longrightarrow \boxed{F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \ , y \in \mathbb{R}}$

Η σ.π.π της Y είναι: $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

$= \dfrac{d}{dy}\left(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right) = \dfrac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \dfrac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y})$

$= \left(\dfrac{d}{dy}\sqrt{y}\right) F_X'(\sqrt{y}) - \dfrac{d}{dy}(-\sqrt{y}) F_X'(-\sqrt{y}) \Rightarrow$

~~$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$~~ , ~~$f_X(\sqrt{y}) =$~~

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})} \quad , \quad y>0$$

β) Εφαρμογή για $X \sim N(0,1)$ οπότε $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \cdot e^{-y/2}} \quad , \quad y \geq 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $Y = X^2 \sim G\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \chi_1^2$

ΠΔ

Έστω συνεχής τ.μ X με α.σ.κ F_X και έστω ότι η F_X είναι γνησίως$_{\to 1-1}$ αύξουσα. Έστω η τ.μ $Y = F_X(X)$

N.δ.ο: $Y \sim U(0,1)$

ΛΥΣΗ

Τιμές της Y: $\boxed{y = F_X(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα $y \in (0,1)$

$$\boxed{F_Y(y)} \overset{op.}{=} P(Y \le y) = P(F_X(X) \le y) \overset{1-1}{=} P(F_X^{-1}(F_X(X)) \le F_X^{-1}(y))$$

$$= P(X \le F_X^{-1}(y)) \overset{op.}{=} F_X(F_X^{-1}(y)) = \boxed{y} \quad \forall y \in (0,1)$$

Άρα, $\boxed{f_Y(y)} = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy} y = \boxed{1}$

Άρα
$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , y \in (0,1) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.7.1 ✓

Έστω τ.μ με σ.π $P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2}{x!} & , x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

$E(X)$, $Var(X)$, $m_X(t) = ?$

ΛΥΣΗ

$$1 = \sum_{x=1,2,3,4} P_X(x) = \sum \frac{ax^2}{x!} \Rightarrow \boxed{a = \frac{6}{31}}$$

SKAG

$$E(X) = \sum_{x=1,2,3,4} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=1,2,3,4} x \cdot \frac{6}{31} \cdot \frac{x^2}{x!} = \frac{73}{31} = 2{,}35$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1,2,3,4} x^2 p_X(x) = \sum_{x=1,2,3,4} x^2 \cdot \frac{6}{31} \frac{x^2}{x!} = 6{,}4194$$

$$Var(X) = 6{,}4194 - 2{,}35^2 = \ldots$$

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum e^{tx} p_X(x) = \sum e^{tx} \frac{6}{31} \frac{x^2}{x!}$$

$$= \frac{6}{31} e^{t} + \frac{12}{31} e^{2t} + \frac{9}{31} e^{3t} + \frac{4}{31} e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}$$